

高等数学 A、B(I)

试卷合集

Edit by Coderdiao

2026 年 7 月 24 日

访问链接以获取最新版本

<https://www.coderdiao.cn/blog/advanced-mathematics-I/>

目录

1	2022–2023 学年高等数学 A(I) 期中考试	1
2	2023–2024 学年高等数学 A(I) 期中考试	4
3	2024–2025 学年高等数学 A(I) 期中考试	7
4	2020–2021 学年高等数学 B(I) 期中考试	10
5	2021–2022 学年高等数学 B(I) 期中模拟	12
6	2021–2022 学年高等数学 B(I) 期中考试	15
7	2022–2023 学年高等数学 B(I) 期中考试	17
8	2023–2024 学年高等数学 B(I) 期中考试	19
9	2024–2025 学年高等数学 B(I) 期中模拟	22
10	2024–2025 学年高等数学 B(I) 期中考试	24
11	2022–2023 学年高等数学 A(I) 期末考试	26
12	2023–2024 学年高等数学 A(I) 期末考试	28
13	2024–2025 学年高等数学 A(I) 期末考试	30
14	2020–2021 学年高等数学 B(I) 期末考试	33
15	2021–2022 学年高等数学 B(I) 期末考试	35
16	2022–2023 学年高等数学 B(I) 期末考试	38
17	2023–2024 学年高等数学 B(I) 期末考试	40
18	2024–2025 学年高等数学 B(I) 期末考试	43

2022–2023 学年高等数学 A(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【5 分】

回答下列问题。

(1) 有理数的有理次幂是否一定是有理数？

(2) 无理数的无理次幂是否一定是无理数？

2. 【15 分】

计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^3-1} - \frac{4}{x^4-1} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2021\sqrt{x+2021} + 2023\sqrt{x+2023} - 2 \cdot 2022\sqrt{x+2022})$$

3. 【10 分】

解下列微分方程。

(1) 已知函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) = 1 + e^{-x}$$

求 $f(x)$ 。(2) 已知函数 $g(x)$ 满足

$$g(x) + g'(x) = 1 + e^{-x}$$

求 $g(x)$ 。

4. 【10 分】

是否存在实数序列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 1.001$? 说明理由.

5. 【10 分】

(1) 求函数

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$.

(2) 求函数

$$g(x) = \int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$$

的导函数 $g'(x)$.

6. 【10 分】

已知函数 $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 试证明: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 连续.

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 试证明: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 连续.

7. 【10 分】

已知函数 $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续且 Riemann 可积. 记 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$. 试证明:

(1) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

(2) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\forall x \in (a, b), F'(x) = f(x)$.

8. 【10 分】

序列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}^{a_1}, \cdots, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$$

判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在. 若存在, 请求出其值; 若不存在, 请说明理由.

9. 【10 分】

求序列 $\{\xi_n\}$ 满足

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n - e^n) = 0.$

(b) 令 $f(x) = x \ln x$. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(\xi_n) - f(e^n)) \neq 0.$

2023–2024 学年高等数学 A(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【20 分】

求下列各极限：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n+i)^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})]^x$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \ln(n+i) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right)$

2. 【20 分】

计算下列各题并适当化简：

(1) 设 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 设

$$y = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $y = \int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(4) 设

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$, 求

$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x).$$

3. 【15 分】

计算下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

(3) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y) = x^2$ 确定的隐函数, 求 $\int \frac{dx}{y^2}$.

4. 【10 分】

试确定实数 a, b 使得函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

成为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

5. 【15 分】

计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

(2) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$

(3) $\int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt \right) dx$

6. 【10 分】

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

7. 【10 分】

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f(0) = 0$, 且 $\forall x > 0, 0 < f(x) < x$. 令

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(a_1), \quad \dots, \quad a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2024–2025 学年高等数学 A(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【16 分】

解答下列各题：

(1) (8 分) 若

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = \frac{4}{9},$$

求参数 a, b 的值。

(2) (8 分) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (c, d) 上连续。试证明：对于任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (c, d)$, 存在 $\xi \in (c, d)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

2. 【16 分】

解答下列各题：

(1) (8 分) 设函数

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \arctan x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

求 $df(x)$.

(2) (8 分) 求函数

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{2} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1}$$

的一阶导数 y' .

3. 【18 分】

设函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{100} \cos \frac{\pi x^2}{4}$.

(1) (5 分) 设函数 $u(x), v(x)$ 任意阶可导。对于正整数 n , 写出函数 $y = u(x)v(x)$ 的 n 阶导数的 Leibniz 公式。

(2) (10 分) 对于正整数 n 满足 $1 \leq n \leq 100$, 求 $f^{(n)}(1)$.

(3) (3 分) 求 $f^{(101)}(2)$.

4. 【16 分】

计算下列积分:

(1) (5 分) $A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx$.

(2) (3 分) $B = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$.

(3) (5 分) $I = \int \sqrt{e^x - 1} dx$.

(4) (3 分) $J = \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

5. 【14 分】

解答下列各题:

(1) (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, 试证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a).$$

(2) (2 分) 举例说明: 即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 存在, 也不能保证 $f'(a)$ 存在。

(3) (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, 对于常数 $k \neq 0, 1$, 试证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + kh) - f(a - h)}{h} = (k + 1)f'(a).$$

(4) (2 分) 举例说明: 对于常数 $k \neq 0, 1$, 即使 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + kh) - f(a - h)}{h}$ 存在, 也不能保证 $f'(a)$ 存在。

6. 【20 分】

证明下列各题:

(1) (10 分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 试用序列极限的定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a.$$

(2) (6 分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

(3) (4 分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a$, 又有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - x_{n-1}) = 0$. 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

2020–2021 学年高等数学 B(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【20 分】

求极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$$

2. 【20 分】

求积分：

$$(1) \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$(2) \int \frac{4x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx$$

$$(3) \int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(4) \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) \sin^3 x dx$$

3. 【10 分】给定一个有限区间 $[a, b]$. 已知函数 $f(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 满足对于任意的 $x, y \in [a, b]$ 都有

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

证明由任意选取的初值 $x_1 \in [a, b]$ 以及递推公式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 所定义的序列 $\{x_n\}$ 存在极限.

4. 【10 分】

求导数:

(1) 设 $y = (\arcsin x)^2$, 求 $y^{(n)}(0)$

(2) $\frac{d}{dx} \int_{x^3+1}^{2^x} \frac{\sin t}{t^4+2} dt$

5. 【10 分】

函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并且 $f(0) = f(1)$. 证明: 存在 $c \in [0, 1]$, 使得 $f(c) = f(c + \frac{1}{3})$

6. 【10 分】

函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导函数. 证明: 对于任意 $x \in [0, 1]$, 有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

给出所有可能的 $f(x)$ 使得上述不等式中等号对于所有 $x \in [0, 1]$ 均成立.

7. 【20 分】

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

其中 m 为正整数. 在 $x \neq 0$ 处, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 求 m 满足的条件, 使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数.

2021–2022 学年高等数学 B(I) 期中模拟

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】

多选题，错选或少选均不得分，无需写出解答过程。

(1) (5 分) 选出下列选项中总是正确的式子。

$$A. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2} \quad B. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1$$

$$C. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \quad D. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

(2) (5 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的非负单调递减的连续函数。定义 $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ ，选出下列选项中总是正确的式子。

$$A. s_n \leq \int_1^n f(x) dx \quad B. s_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

$$C. s_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \quad D. s_n \geq f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx$$

2. 【18 分】

计算下列极限。

$$(1) (6 \text{ 分}) \text{ 计算序列极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^{2021}}{n^{2022}}$$

$$(2) (6 \text{ 分}) \text{ 计算函数极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x^{2022}} + \cos \frac{1}{x^{1011}} \right)^{x^{2022}}$$

$$(3) (6 \text{ 分}) \text{ 计算函数极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$$

3. 【12 分】

计算下列积分。

(1) (6 分) 计算定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x \arctan(e^x)}{1 + \sin^2 x} dx$

(2) (6 分) 计算不定积分 $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(1+x^2)^2} dx$

4. 【8 分】

设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \begin{cases} axe^x + bx^x, & x > 1, \\ |x|, & x \leq 1. \end{cases}$$

求所有可能的参数 a, b 使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导。

5. 【12 分】

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 1 为周期的连续函数, 试证明: $\exists c \in \mathbb{R}, \text{s.t. } f(c) = f(c+\pi)$.

6. 【8 分】

计算曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ 在 $x \in [0, \pi]$ 部分的弧长。

7. 【12 分】

考虑方程 $x = \tan x$ 的正实根。

(1) (4 分) 试证明: $x = \tan x$ 有无穷多个正实根。

(2) (8 分) 将 $x = \tan x$ 的正实根从小到大排列成序列 $\{x_n\}$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi$.

8. 【12 分】

设 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \sqrt[n]{n}$.

(1) (6 分) 用 ε - N 语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

(2) (6 分) 求所有的正实数 a 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)^a$ 收敛。

9. 【8 分】

给定正整数 a , 定义 $f_a(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^a$, 求所有自然数 n 满足 $f_a^{(n)}(0) = 0$.

2021–2022 学年高等数学 B(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【15 分】

导数类基本计算题。

(1) (5 分) 求函数 $f(x) = x^{\arcsin x}$, $0 < x < 1$ 的导函数 $f'(x)$.(2) (5 分) 求函数 $f(x) = \int_e^{e^x} \frac{dt}{1 + \ln t}$ 的导函数 $f'(x)$.(3) (5 分) 求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f^{(3)}(0)$.**2. 【15 分】**

积分类基本计算题。

(1) (5 分) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.(2) (5 分) 求欧氏平面直角坐标系中曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 从 $(0, 0)$ 到 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长。(3) (5 分) 设奇数 $n \geq 3$, 求极坐标系 (r, θ) 中曲线 $r = \sin(n\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 围成的封闭图形的面积。**3. 【15 分】**序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出其值。**4. 【20 分】**

设 $x > 0$, 定义

$$p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 2021}}$$

试证明: 方程 $p(x+1) = p(x) + \sin x$ 有无穷多个正实数解。

5. 【15 分】

证明: 对于任意定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

6. 【20 分】

设 $y = f(x) = x^3, x = g(t) = t^2, y = f(g(t)) = t^6, \Delta t = 0.1, \Delta x = g(1+0.1) - g(1) = 0.21$.

(1) (6 分) 当把 t 作为自变量时, 函数 $y = f(g(t)) = t^6$ 的二阶微分记为 $d_t^2 y$, 函数 $x = g(t) = t^2$ 的一阶微分记为 $d_t x$. 试计算: 当 $t = 1, \Delta t = 0.1$ 时, $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 和 $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$.

(2) (7 分) 当把 x 作为自变量时, 函数 $y = f(x) = x^3$ 的二阶微分记为 $d_x^2 y$, x (视作 x 的函数) 的一阶微分记为 $d_x x$. 试计算: 当 $x = 1, \Delta x = 0.21$ 时, $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 和 $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$.

(3) (6 分) $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2} \Big|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 和 $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2} \Big|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 相等吗?

2022–2023 学年高等数学 B(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【20 分】(1) (6 分) 求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$ (2) (7 分) 求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{2n}\right)$ (3) (7 分) 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ **2. 【20 分】**(1) (6 分) 设 $x > 0$, 求出函数 $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ 的导函数 $f'(x)$.(2) (7 分) 设 $x < 1$, 求出函数 $g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ 的导函数 $g'(x)$.(3) (7 分) 设 $x \neq \pm 1$, 求出函数 $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ 的四阶导函数 $h^{(4)}(x)$.**3. 【15 分】**求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$.**4. 【15 分】**

设 K 是曲线弧 $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) 与直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体, 求 K 的侧面积。

5. 【10 分】

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a, b, c > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$f(0) = -a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$$

求证 $f(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上至少有两个不相等的实根 r_1, r_2 .

6. 【20 分】

设 $A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$.

(1) (12 分) 试证明 $\forall r \in (-1, 1)$, $A(r^2) = 2A(r)$.

(2) (4 分) 试证明 $A(r)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上有界。

(3) (4 分) 试计算 $r \in (-1, 1)$ 时 $A(r)$ 的值。

2023–2024 学年高等数学 B(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ne}\right)^n$.**2. 【10 分】**设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，求函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{[x]}$.**3. 【10 分】**设 $x > 0$ ，求函数 $f(x) = \int_0^{\ln x} \sqrt{1+e^t} dt$ 的导函数。**4. 【10 分】**求不定积分 $\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx$.**5. 【10 分】**

求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y = \frac{1}{2x} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

在 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的弧长。**6. 【10 分】**设欧氏空间中 V 是曲线弧 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}$ ($1 \leq x \leq 2$) 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体，求 V 的体积。

7. 【10 分】

无穷序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $0 < b_1 < a_1$, 且有以下递推关系

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

8. 【20 分】

本题中每个小问都要求给出证明和计算过程。

(1) (2 分) 试证明: 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时有

$$-1 < \frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x} < 1.$$

(2) (8 分) 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 求函数

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x}\right)$$

的导函数。

(3) (10 分) 试证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4 \cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} \cos^2 x + 2 \sin^2 x}}.$$

9. 【10 分】

设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足 $f(0) = g(0)$, $\sin(f(1)) =$

$\sin(g(1)), \cos(f(1)) = \cos(g(1))$, 且

$$\forall x \in [0, 1], (\cos(f(x)) + \cos(g(x)))^2 + (\sin(f(x)) + \sin(g(x)))^2 \neq 0$$

证明 $f(1) = g(1)$.

2024–2025 学年高等数学 B(I) 期中模拟

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【15 分】

解答下列问题。

(1) (5 分) 求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(\sqrt{n^2 + 1} \pi)|$.(2) (5 分) 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2}$.

(3) (5 分) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的导函数 $f'(x)$.**2. 【10 分】**

设参数方程

$$\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \quad x = 0$$

确定函数 $y = f(x)$. 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.**3. 【10 分】**求不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$.**4. 【10 分】**求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的弧长。

5. 【10 分】

设 $t \in (0, 1)$, $f(t)$ 表示曲线 $y = \sec t$ 与直线 $x = 0$, $y = 0$ 和 $x = \arcsin t$ 围成的封闭图形的面积。

(1) (5 分) 求 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$.

(2) (5 分) 求 $f(t)$.

6. 【10 分】

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且有

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$$

试证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有两个零点。

7. 【20 分】

解答下列问题。

(1) (8 分) 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且有限。

(2) (12 分) 对于 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} dt$$

求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

8. 【15 分】

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

2024–2025 学年高等数学 B(I) 期中考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)}$.**2. 【10 分】**求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos 2x} \right)^{\csc^2 x}$.**3. 【10 分】**求定义在 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

的二阶导函数 $f''(x)$.**4. 【10 分】**求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{kn^k}\right)$.**5. 【15 分】**求不定积分 $\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx$.

6. 【15 分】

设欧氏空间中 V 是曲线弧 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}}$ ($1 \leq x \leq 2$) 与直线 $x = 1, x = 2$ 围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体, 求 V 的体积。

7. 【15 分】

试证明: 方程 $x^{18} + x^{12} - \cos x = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上根的个数为 2.

8. 【15 分】

设 $D = [0, 1]$, 函数 $A, B : D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上连续, 且

$$\forall x \in D, \quad 0 \leq A(x) \leq 1.$$

对于 D 上的连续函数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$Tf(x) = B(x) + \int_0^x A(x)f(x) \, dx.$$

试证明: $Tf = f$ 有唯一连续函数解。即对于 $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $Tf = f$, $Tg = g$, 则 $f = g$.

2022–2023 学年高等数学 A(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【16 分】

(1) 证明直线 $l: \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 5x + 2y - 5z = -6 \end{cases}$ 过点 $(1, 2, 3)$, 并把此一般方程化为标准方程。

(2) 求曲线 $x = 7t - 14, y = 4t^2, z = 3t^3$ 在参数 $t = 1$ 时对应的点 P 处的法平面方程。

2. 【20 分】

计算下列各题：

(1) 设 $z = \arctan \frac{(x-3)y + (x^2 + x - 1)y^2}{(x-2)y + (x-3)^2 y^4}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(3,0)}$ 。

(2) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $m\left(x + \frac{z}{y}\right)^n + n\left(y + \frac{z}{x}\right)^m = 1$ 确定 ($m, n \in \mathbb{N}$)。计算并化简：
 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + xy$ 。

3. 【24 分】

考虑下列极限, 若存在求其值; 若不存在说明理由。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \sin^3 2t \, dt}{\int_0^{x^2} \tan t^5 \, dt}$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

4. 【24 分】

计算下列各题:

(1) 设 P_1, P_2 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上两点, O 为原点。计算 $(\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2})^2 + (\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2})^2$ 。

(2) 计算 $\int_{-1}^1 \left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} \right) dx$ 。

(3) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x} dx$ 。

5. 【8 分】

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可导, $f(a) = f(b) = 0$, $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$ 。

6. 【8 分】

设 $f(x) \in C^1[0, 2]$, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$ 。证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $|f'(\xi)| \geq M$ 。

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, 有 $|f'(x)| \leq M$, 则 $f \equiv 0$ 。

2023–2024 学年高等数学 A(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【20 分】

(1) 求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [(1+x)^{\frac{1}{x}} - e]$ 。

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导，且

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = a$$

求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^{n+1}}$ 。

2. 【20 分】

(1) 设二元函数 $F(u, v)$ 有连续的二阶偏导数， $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x - z, y - z) = 0$ 确定的隐函数。计算并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(2) 给定方程组

$$\begin{cases} xy + yz^2 + 4 = 0, \\ x^2y + yz - z^2 + 5 = 0, \end{cases} \quad (*)$$

试讨论在点 $P_0(1, -2, 1)$ 附近方程组 (*) 能确定哪些隐函数？并计算 (*) 确定出的隐函数在 P_0 处的导数。

3. 【20 分】

求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值。

4. 【20 分】

(1) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的一个邻域内有定义且在 $(0, 0)$ 处连续。若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 求证: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。

(2) 平面 $x + y + z = 1$ 截圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 得一椭圆周, 试用多元微分学的方法求此椭圆周上到原点最近及最远的点。

5. 【20 分】

(1) 设 $f(x)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $T \neq 0$ 的无穷阶光滑函数, k 为任一给定的自然数。证明一定存在点 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $f^{(k)}(\xi) = 0$ 。

(2) 设函数 $f(u, v)$ 有连续偏导数 $f_u(u, v), f_v(u, v)$, 且满足 $f(x, 1 - x) = 1$ 。证明: 函数 $f(u, v)$ 在单位圆周 $u^2 + v^2 = 1$ 上至少存在两个不同的点满足下列方程: $vf_u(u, v) = uf_v(u, v)$ 。

2024–2025 学年高等数学 A(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【11 分】计算极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2}$ 。**2. 【11 分】**求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ 。**3. 【11 分】**将函数 $f(x) = \cos(2x) \cdot \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开到 x^4 项。**4. 【12 分】**设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导, 满足: (1) $f(a) = f(b) = 0$; (2) 存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$ 。**5. 【10 分】**

本题只需要给出结果, 不需要证明。

(1) 设平面 Σ 过点 P_0 , 其法向量为 $\vec{n}$, P_1 是平面 Σ 外一点, 请用 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 和 $\vec{n}$ 表达出点 P_1 到平面 Σ 的距离。(2) 设直线 L 过点 P_0 , 其方向矢量为 $\vec{\tau}$, P_1 是 L 外一点, 请用 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 和 $\vec{\tau}$ 表达出点 P_1 到 L 的距离。(3) 设异面直线 L_1, L_2 的方向矢量分别为 $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ 。若已知点 P_1 在 L_1 上, 点 P_2 在 L_2 上, 请用 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ 表达出 L_1, L_2 间的距离公式。

6. 【10 分】

设

$$f(x, y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性。

7. 【10 分】

(1) 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

计算方向导数 $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \ell}$, 其中 $\ell = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 为单位向量。

(2) 若一个二元函数 $g(x, y)$ 于 (x_0, y_0) 点取到极小值, 那么 $t = 0$ 是否一定是 $h(t) = g(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ 的极小值点? 为什么?

(3) 若对任意 $\alpha \in [0, 2\pi)$, $t = 0$ 是 $h(t)$ 的极小值点, 那么 (x_0, y_0) 是否一定是 $g(x, y)$ 的极小值点? 为什么?

8. 【15 分】

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定的隐函数, 试求 $z = z(x, y)$ 的极值。

9. 【10 分】

设一元函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ ($a < b$) 上二阶可导, $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$,

且 $x \in [a, b]$ 时 $|f''(x)| \leq M$ (M 为一个正数)。求证：

$$|f(x)| \leq \frac{M}{16}(b-a)^2, \quad x \in [a, b].$$

2020–2021 学年高等数学 B(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【15 分】

下面的极限存在吗？如果存在，求出极限值。如果不存在，写出理由。

(1) (5 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$

(2) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8}$

(3) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}$

2. 【15 分】求出闭区间 $[-1, 1]$ 上的一元函数

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$$

达到最小值的所有的点。

3. 【20 分】(1) (15 分) 设 a, b 是实数, $b \neq 0$ 。求出二元函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 (a, b) 处的二阶泰勒多项式。(2) (5 分) 设 $a < b$, n 为正整数, 函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 (a, b) 中每点都有 $(n+1)$ 阶导数, 定义二元函数 $T: (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$T(x, y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k$$

求出 $T(x, y)$ 对 y 的一阶偏导函数 $\frac{\partial T(x, y)}{\partial y}$ 。

4. 【10 分】

证明：对任意给定的实数 p ，存在点 1 的开邻域 U ，存在点 1 的开邻域 W ，存在唯一的函数 $y = f(x)$ ， $x \in U$ ， $f(x) \in W$ 满足方程 $x^p + y^p - 2xy = 0$ 。

5. 【15 分】

设在空间 Oxy 平面之外的点 (x, y, z) 处的电势 $V = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$ 。求出在点 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 处，电势下降最快的方向上的单位向量。

6. 【25 分】

设空间中的平面 $K: x + 2y + 3z = 6$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴分别交于三点 A, B, C 。 $\mathbb{R}^3$ 中一个动点 H 与平面保持恒定的距离 1， H 在平面 K 上的垂直投影记为 M 。假设 M 在以 A, B, C 为顶点的三角形 $\triangle ABC$ 之中， M 到三条边 BC, CA, AB 的距离分别记为 p, q, r 。

(1) (5 分) 求出三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(2) (5 分) 用 p, q, r 表示以 A, B, C, H 为四个顶点的四面体的表面积 $S(p, q, r)$ 。

(3) (5 分) 写出变量 p, q, r 必须满足的约束条件。

(4) (10 分) 求出以 p, q, r 为变量的函数 $S(p, q, r)$ 的条件极值的稳定点。

2021–2022 学年高等数学 B(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】证明：任给 $x \in \mathbb{R}$ ，存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得

$$\arctan x = \frac{x}{1 + (\theta(x))^2 x^2}.$$

2. 【20 分】

求极限：

$$(1) \quad (10 \text{ 分}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{1 - \frac{x \sin x}{2}} - \sqrt{\cos x}}$$

$$(2) \quad (10 \text{ 分}) \quad \text{设 } n \text{ 是任给的正整数，对于每个 } 1 \leq k \leq n, a_k \text{ 是任给的正实数。求出}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

3. 【15 分】设正整数 $n \geq 2$ 。求出函数

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 5x^2}{(1 - 2x)(1 + x^2)}$$

在 $x = 0$ 点的 $(2n + 1)$ 阶局部泰勒公式（即带佩亚诺余项的泰勒展开式）。**4. 【10 分】**

定义三元函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

(1) (6 分) 计算出在点 $(0, 0, 0)$ 处三个偏导数 $f_x(0, 0, 0), f_y(0, 0, 0), f_z(0, 0, 0)$ 。

(2) (4 分) 三元函数在点 $(0, 0, 0)$ 处可微吗? 证明你的结论。

5. 【15 分】

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数。任给 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, 当 $x \neq 0$ 时, 定义

$$h(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

计算出

$$x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{yx}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y).$$

6. 【20 分】

设 $F(x, y, z) = x^3 + (y^2 - 1)z^3 - xyz$ 。

(1) (5 分) 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(1, 1)$ 的一个邻域 D 以及 D 上唯一的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z(1, 1) = 1$ 。

(2) (5 分) 求出在点 $(1, 1)$ 处函数 $z(x, y)$ 的值减少最快的方向上的单位向量 $\vec{E}$ 。

(3) (10 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x + 2y - 2z = 1$ 的 z 分量为正的法向量记为 $\vec{N}$ 。向量 $(\vec{E}, 0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量。求出 $\vec{N}$ 和 $(\vec{E}, 0)$ 的夹角余弦。

7. 【10 分】

给定正整数 $n \geq 3$ 。求出半径为 1 的圆的内接 n 边形所能达到的最大面积。（注：要求写出解答的详细过程。如果用到教材中没有明确写成定理的某个不等式，则要求写出从教材中定义和定理出发推出此不等式的详细过程。）

2022–2023 学年高等数学 B(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】

设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x + 3y + 2z = 6$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点分别为 A, B, C 。

(1) (5 分) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(2) (5 分) 求过 A, B, C 及原点 $(0, 0, 0)$ 的球面的方程。

2. 【15 分】

下面二元函数的极限存在吗？如果存在，求出极限值；如果不存在，写出理由。

(1) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{24 \cos \sqrt{x^2 + y^2} - 24 + 12(x^2 + y^2)}{(\tan \sqrt{x^2 + y^2})^4}$

(2) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \ln(1 + y)) \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$

(3) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sin^2 x + \sin^2 y}$

3. 【10 分】

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数。对于任何 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ，当 $x \neq 0$ 时，定义

$$h(x, y) = x g\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

计算 $x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{xy}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y)$ 。

4. 【10 分】

求 $\mathbb{R}^2$ 中曲线 $e^{xy} + xy + y^2 = 2$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程。

5. 【10 分】

设三元函数 $f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}\right)^y$, 这里 $z \neq 0$. 求 $f(x, y, z)$ 在点 $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ 处下降最快的方向上的单位向量。

6. 【10 分】

求二元函数 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(2, 2)$ 处的二阶泰勒多项式。

7. 【10 分】

求函数 $f(x) = \sin^{\frac{2}{3}} x + \cos^{\frac{2}{3}} x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值, 并指明所有最小值点。

8. 【10 分】

证明: 任意给定实数 k , 存在点 0 的开邻域 U , 存在点 0 的开邻域 W , 存在唯一的函数 $y = f(x)$, $x \in U$, $y \in W$ 满足方程 $e^{kx} + e^{ky} - 2e^{x+y} = 0$ 。

9. 【15 分】

设 r 是正实数, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^3(D)$, $f(0, 0) = 0$, 且 f 在点 $(0, 0)$ 处的一阶全微分 $df(0, 0) = 0$. E, F, G 都是常数, 在点 $(0, 0)$ 处的二阶微分为

$$d^2 f(0, 0) = E(\Delta x)^2 + 2F\Delta x\Delta y + G(\Delta y)^2.$$

(1) (10 分) 证明: 存在 D 上的两个函数 $a: D \rightarrow \mathbb{R}$, $b: D \rightarrow \mathbb{R}$ 使得任取 $(x, y) \in D$ 有 $f(x, y) = xa(x, y) + yb(x, y)$, 且 $a(0, 0) = 0$, $b(0, 0) = 0$ 。

(2) (5 分) 如果 $E > 0$ 且 $EG - F^2 < 0$, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中点 $(0, 0, 0)$ 的充分小邻域中, 曲面 $z = f(x, y)$ 充分近似于哪类二次曲面? 画出此类二次曲面的草图。从此类二次曲面的几何形状来判断: 是否存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0, 0)$ 的充分小邻域 D_1 , 存在 D_1 上的一对一的 C^1 变量变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 使得 $f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2$?

2023–2024 学年高等数学 B(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x - \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt\right)}{x^3}$ 。

2. 【10 分】

设函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in [0, 7]$ 。区间 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的严格单调区间, 指的是 $0 \leq a < b \leq 7$ 并且 f 限制在 $[a, b]$ 上是严格单调的。求出 $f(x)$ 的长度最大的严格单调区间。

3. 【10 分】

设 $\mathbb{R}^3$ 中平面的方程是 $2x - y + 3z = 6$ 。平面与坐标轴交点依次为 A, B, C 。

(1) (5 分) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(2) (5 分) 求以原点 $(0, 0, 0)$ 为中心且与该平面相切的球面上切点的坐标。

4. 【10 分】

设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 + ze^x + y = 0$ 所确定的隐函数。求 z 在点 $(0, 2)$ 处下降最快的方向上的单位向量。

5. 【10 分】

求二元函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 的二阶泰勒多项式。

6. 【10 分】

设 D 是由直线 $x + y = 2\pi$ 、 x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

7. 【10 分】

(1) (2 分) 举例说明：当 z 是 (x, y) 的函数，也是 (t, u) 的函数时， x 恒等于 t 推不出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 恒等于 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 。

(2) (8 分) 给定方程

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

作变量代换

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1 + tu}, \quad z = \frac{t}{1 + tW}$$

证明： $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ 。

8. 【15 分】

(1) (3 分) 证明：任取 $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ，有

$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

(2) (12 分) 证明：任取 $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$ ，有

$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

9. 【15 分】

设函数 $P(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, 且 $P(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数。任意取定正实数 A 、正实数 B 、正整数 n 。证明: 在开区间 $(0, 1)$ 内存在严格递增的 $n + 1$ 个实数 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ 使得

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{P'(\theta_k)} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

2024–2025 学年高等数学 B(I) 期末考试

考试时间：120 分钟

总分：100 分

1. 【10 分】

求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2}$ 。

2. 【10 分】

设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 P 的方程是 $2x + y - 3z = 0$ ，平面 Q 的方程是 $x + 2y - z - 2 = 0$ ，直线 $L = P \cap Q$ 是 P 与 Q 的交线。求与 L 相切的、以原点 $(0, 0, 0)$ 为中心的球面方程。

3. 【10 分】

下面二元函数的极限存在吗？如果存在，求出极限值。如果不存在，写出理由。

(1) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (\tan y)^2}$

(2) (5 分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{e^x - 1 + \sin y} \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

4. 【10 分】

设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 + x^2z - 2y^3 = 0$ 所确定的隐函数。求函数 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处最大的方向导数。

5. 【15 分】

求二元函数 $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$ 在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式及带 Peano 余项的泰勒公式。

6. 【15 分】

设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x, y) = x^2 + 2xy \sin(x + y) - y^2$ 。证明：存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0, 0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in D$ 使得 $x(0, 0) = 0$, $y(0, 0) = 0$, 并且对于任意 $(u, v) \in D$ 有

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2.$$

7. 【15 分】

求在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中从原点到曲面 $(x - y)^2 - z^2 = 4$ 上的点的最短距离。

8. 【15 分】

设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的黎曼可积函数, A 是实数, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ 。证明序列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx = \pi A.$$

(注：在本题的条件中没有假设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续。)